Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-4n+1}{2^n}$.

Решение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-4n+1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot\left(n^2-2n\right)+1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot\left(n^2-2n+1-1\right)+1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(n-1)^2-1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(n-1)^2}{2^{n-1}}-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Найдём вспомогательные суммы.

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{2^k}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{2^k}+\frac{1}{2^k}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}+\frac{n}{2^n}-\frac{n}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}-\frac{n}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}-\frac{n}{2^{n+1}}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot U_k-\frac{n}{2^{n+1}}+\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}U_n$$

$$U_n=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}U_n;\ U_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}.$$

$$V_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{2^k}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k^2}{2^k}+2\cdot\frac{k}{2^k}+\frac{1}{2^k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{2^k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{2^k}+\frac{n^2}{2^n}-\frac{n^2}{2^n}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}+\frac{n}{2^n}-\frac{n}{2^n}+\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}-\frac{n^2}{2^{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}-\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n=1+\frac{1}{2}V_n-\frac{n^2}{2^{n+1}}+U_n-\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^n}$$

$$V_n=1+\frac{1}{2}V_n-\frac{n^2}{2^{n+1}}+U_n-\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^n}$$

$$V_n=2-\frac{n^2}{2^n}+2U_n-\frac{n}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{n^2}{2^n}+2\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}\right)-\frac{n}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}}=6-\frac{n^2}{2^n}-\frac{3}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^{n-2}}$$

Для исходного ряда получим:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(k-1)^2}{2^{k-1}}-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)^2}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=2}^{n}\frac{(k-1)^2}{2^{k-1}}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{2^k}-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=$$

$$=V_{n-1}-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n=6-\frac{(n-1)^2}{2^{n-1}}-\frac{3}{2^{n-2}}-\frac{n-1}{2^{n-3}}-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n=5-\frac{1}{2^n}\cdot\left(2(n-1)^2+12+8(n-1)-1\right)=5-\frac{2n^2+4n+5}{2^n}$$

Рассмотрим вспомогательный предел, – два раза применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+4x+5}{2^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x^2+4x+5\right)'}{\left(2^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+4}{2^x\ln 2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(4x+4)'}{\left(2^x\ln 2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2^x\ln^2 2}=0$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+4x+5}{2^x}=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+4n+5}{2^n}=0$.

Сумма ряда будет такой:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{2n^2+4n+5}{2^n}\right)=5-0=5.$$

Ответ: 5.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.