Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ с точностью $0{,}0001$.

Решение

Это знакочередующийся ряд. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$. Обозначим $u_n=\frac{1}{(2n+1)!}$, тогда $u_{n+1}=\frac{1}{(2n+3)!}$. Применим признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=0.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$ сходится, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ сходится абсолютно. Следовательно, сумма ряда существует.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}-\frac{1}{5040}+\frac{1}{362880}-\ldots$$

Так как $\frac{1}{362880}<0{,}0001$ то для нахождения суммы ряда с заданной точностью достаточно ограничиться первыми тремя членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\approx-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}-\frac{1}{5040}=-\frac{799}{5040}\approx-0{,}1585.$$

Ответ: $-0{,}1585$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.