Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить приближенное значение $e^{0,1}$ с абсолютной погрешностью, не превышающей $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение

Так как $e^x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, то $e^{\frac{1}{10}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)! \cdot 10^{n-1}}$.

Оценим остаток ряда:

$$r_n = \frac{1}{n! \cdot 10^n} + \frac{1}{(n+1)! \cdot 10^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)! \cdot 10^{n+2}} + \frac{1}{(n+3)! \cdot 10^{n+3}} + \frac{1}{(n+4)! \cdot 10^{n+4}} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{n! \cdot 10^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{10(n+1)} + \frac{1}{10^2 (n+1)(n+2)} + \frac{1}{10^3 (n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{1}{10^4 (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{n! \cdot 10^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{10(n+1)} + \frac{1}{(10(n+1))^2} + \frac{1}{(10(n+1))^3} + \frac{1}{(10(n+1))^4} + \ldots\right) = \frac{1}{n! \cdot 10^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10(n+1)}} =$$

$$= \frac{1}{n! \cdot 10^n} \cdot \frac{10(n+1)}{10(n+1) - 1} = \frac{1}{n! \cdot 10^n} \cdot \frac{10(n+1)}{10n + 9} = \frac{n+1}{n! \cdot 10^{n-1} \cdot (10n+9)}.$$

При $n = 3$ имеем: $\frac{n+1}{n! \cdot 10^{n-1} \cdot (10n+9)} = \frac{1}{5850}$, т.е. $r_3 < \frac{1}{5850} < 0{,}001$. Следовательно, чтобы вычислить $e^{0,1}$ с заданной погрешностью, достаточно ограничиться первыми тремя членами ряда:

$$e^{\frac{1}{10}} \approx 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{2! \cdot 10^2} = \frac{221}{200} = 1{,}105.$$

Ответ: $e^{\frac{1}{10}} \approx 1{,}105$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.