Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Сколько нужно взять слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2+1}$, чтобы получить его сумму с точностью до 0,01?

Решение

Так как $n^4+n^2+1>n^4$, то $\frac{1}{n^4+n^2+1}<\frac{1}{n^4}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ сходится (так как степень $4>1$), поэтому согласно признаку сравнения будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2+1}$, т.е. сумма рассматриваемого ряда существует.

Рассмотрим остаток данного ряда:

$$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^4+k^2+1}<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^4+k^2}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2\left(k^2+1\right)}=\frac{1}{(n+1)^2\cdot\left((n+1)^2+1\right)}+\frac{1}{(n+2)^2\cdot\left((n+2)^2+1\right)}+$$
$$+\frac{1}{(n+3)^2\cdot\left((n+3)^2+1\right)}+\ldots<\frac{1}{(n+1)^2\cdot\left((n+1)^2+1\right)}+\frac{1}{(n+2)^2\cdot\left((n+1)^2+1\right)}+\frac{1}{(n+3)^2\cdot\left((n+1)^2+1\right)}+\ldots<$$
$$<\frac{1}{(n+1)^2+1}\cdot\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\ldots\right)<\frac{1}{(n+1)^2+1}\cdot\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{(n+1)^2+1}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)\cdot k}$$

Рассмотрим дробь $\frac{1}{(k-1)\cdot k}$:

$$\frac{1}{(k-1)\cdot k}=-\frac{-1}{(k-1)\cdot k}=-\frac{k-1-k}{(k-1)\cdot k}=-\left(\frac{k-1}{(k-1)k}-\frac{k}{(k-1)k}\right)=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

Используя полученное разложение, будем иметь:

$$\frac{1}{(n+1)^2+1}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)\cdot k}=\frac{1}{(n+1)^2+1}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\ldots\right)=\frac{1}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{1}{n}=$$
$$=\frac{1}{n\left(n^2+2n+2\right)}$$

Следовательно, $r_n<\frac{1}{n\left(n^2+2n+2\right)}$. Если $n=4$, то $n\left(n^2+2n+2\right)=104$, поэтому $r_4<\frac{1}{104}<0{,}01$. Таким образом для точности 0,01 достаточно ограничиться первыми четырьмя членами ряда.

Ответ: 4.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.