Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Оценить ошибку, полученную при замене суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2}{2^n}$ суммой первых 10 слагаемых.

Решение

Данный ряд знакопеременный. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n^2}{2^n}\right|$. Так как $\left|\sin n^2\right|\le 1$, то $\left|\frac{\sin n^2}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, поэтому согласно признаку сравнения будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n^2}{2^n}\right|$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n^2}{2^n}\right|$ следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2}{2^n}$ сходится абсолютно, т.е. сумма этого ряда существует.

Оценим ошибку (погрешность) ε, полученную при замене, т.е. оценим модуль остатка r_{10}:

$$\varepsilon=|r_{10}|=\left|\sum_{n=11}^{\infty}\frac{\sin n^2}{2^n}\right|\le\sum_{n=11}^{\infty}\left|\frac{\sin n^2}{2^n}\right|\le\sum_{n=11}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=11}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ряд $\sum_{n=11}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{11}$ и знаменателем $q=\frac{1}{2}$. Сумма этой прогрессии будет такой:

$$\sum_{n=11}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}.$$

Следовательно, $|r_{10}|<\frac{1}{1024}$, т.е, погрешность $\varepsilon<\frac{1}{1024}$.

Ответ: $\varepsilon<\frac{1}{1024}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.