Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Сколько нужно взять слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 2^n}$, чтобы получить его сумму с точностью до 0,01?

Решение

Так как $n^2 2^n > n^2$, то $\frac{1}{n^2 2^n} < \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (так как степень $2>1$), поэтому согласно признаку сравнения будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 2^n}$, т.е. сумма рассматриваемого ряда существует.

Рассмотрим остаток данного ряда:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2 2^k} = \frac{1}{(n+1)^2\cdot 2^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)^2\cdot 2^{n+2}} + \frac{1}{(n+3)^2\cdot 2^{n+3}} + \ldots = \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2\cdot 2} + \frac{1}{(n+3)^2\cdot 2^2} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2\cdot 2} + \frac{1}{(n+1)^2\cdot 2^2} + \ldots\right) = \frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)^2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\right)$$

Выражение $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots$ есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Сумма этой прогрессии равна $\frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Следовательно, $r_n < \frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)^2}\cdot 2 = \frac{1}{2^n\cdot(n+1)^2}$. Если $n=3$, то $2^n\cdot(n+1)^2 = 128$, поэтому $r_3 < \frac{1}{128} < 0{,}01$. Таким образом для точности 0,01 достаточно ограничиться первыми тремя членами ряда.

Ответ: 3.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.