Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{(n!)^2}$ сходится абсолютно. Вычислите его сумму с точностью до $\pm 10^{-2}$.

Решение

Данный ряд знакопеременный. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos 2n}{(n!)^2}\right|$. Так как $|\cos 2n|\le 1$ и $(n!)^2 \ge n^2$, то $\left|\frac{\cos 2n}{(n!)^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится так как степень $2>1$, поэтому согласно признаку сравнения будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos 2n}{(n!)^2}\right|$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos 2n}{(n!)^2}\right|$ следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{(n!)^2}$ сходится абсолютно.

Оценим модуль остатка r_n:

$$|r_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos 2k}{(k!)^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\cos 2k}{(k!)^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2} < \frac{1}{((n+1)!)^2}+\frac{1}{((n+2)!)^2}+\frac{1}{((n+3)!)^2}+\frac{1}{((n+4)!)^2}+\ldots =$$

$$= \frac{1}{((n+1)!)^2}\cdot\left(1+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^2(n+3)^2}+\frac{1}{(n+2)^2(n+3)^2(n+4)^2}+\ldots\right) \le$$

$$\le \frac{1}{((n+1)!)^2}\cdot\left(1+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^4}+\frac{1}{(n+2)^6}+\ldots\right) = \frac{1}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{(n+2)^2}} = \frac{1}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n+2)^2}{(n+2)^2-1}$$

Следовательно, $|r_n| < \frac{1}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n+2)^2}{(n+2)^2-1}$. Так как $|r_3|<0{,}0018$, то для оценки получения суммы ряда с точностью до $\pm 10^{-2}$ достаточно взять $n=3$ слагаемых.

$$S \approx \sum_{n=1}^{3}\frac{\cos 2n}{(n!)^2} = \frac{\cos 2}{1}+\frac{\cos 4}{4}+\frac{\cos 6}{36} \approx -0{,}55.$$

Ответ: $S \approx -0{,}55$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.