Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$ сходится. Вычислите его сумму с точностью до $\pm 10^{-2}$.

Решение

Данный ряд знакоположительный. Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{1}{2}<1$, то согласно радикальному признаку Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$ будет сходиться. Оценим остаток r_n. Для этого рассмотрим выражение $a_k=\frac{k+2}{2k}$:

$$a_k=\frac{k+2}{2k}=\frac{k}{2k}+\frac{2}{2k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{k}.$$

$$a_k-a_{k+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{k}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}>0,\ a_k>a_{k+1}.$$

$$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{k+2}{2k}\right)^k=\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k)^k=$$

$$=(a_{n+1})^{n+1}+(a_{n+2})^{n+2}+(a_{n+3})^{n+3}+(a_{n+4})^{n+4}+\ldots<(a_{n+1})^{n+1}+(a_{n+1})^{n+2}+(a_{n+1})^{n+3}+(a_{n+1})^{n+4}+\ldots=$$

$$=(a_{n+1})^{n+1}\cdot\left(1+a_{n+1}+(a_{n+1})^2+(a_{n+1})^3+\ldots\right)$$

Выясним, при каком значении k верно неравенство $a_{n+1}<1$:

$$\frac{n+1+2}{2(n+1)}<1,\ n+3<2n+2,\ n>1.$$

Полагая $n>1$, получим:

$$r_n<(a_{n+1})^{n+1}\cdot\left(1+a_{n+1}+(a_{n+1})^2+(a_{n+1})^3+\ldots\right)=(a_{n+1})^{n+1}\cdot\frac{1}{1-a_{n+1}}=\frac{(a_{n+1})^{n+1}}{1-a_{n+1}}=\frac{\left(\frac{n+3}{2(n+1)}\right)^{n+1}}{1-\frac{n+3}{2(n+1)}}$$

Так как $r_n<\frac{\left(\frac{n+3}{2(n+1)}\right)^{n+1}}{1-\frac{n+3}{2(n+1)}}$, то при $n=10$ имеем $r_{10}<0{,}0075$, поэтому для оценки суммы ряда с точностью до $\pm 10^{-2}$ достаточно взять $n=10$ слагаемых.

$$S \approx \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{n+2}{2n} \right)^n = \left(\frac{3}{2} \right)^1 + \left(\frac{4}{4} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{12}{20} \right)^{10} \approx 3{,}74 .$$

Ответ: $S \approx 3{,}74$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.